1-1 數與數線

§重點整理§

這是高一數學的第一章第一節, 從這裡開始, 我們就要踏上高中數學的旅程. 高中數學不僅是國中數學的延續, 且在內容上更加深、加廣. 加深意味著更強調數學這門學科的嚴謹, 因此會有比較多的證明. 除了極少數的情況, 所有的定理、公式, 我們都會給出證明. 此外, 加深也意味著高度的抽象化, 也就是會有更多的數學符號而不是數值計算, 因為這樣得出的結果更具有一般性. 加廣則是強調數學與物理的連結. 自然科學的語言是數學, 物理因為有了數學才得以描述自然現象, 讓我們一窺大自然的堂奧; 數學因為有了物理而顯得生動活潑. 數學是一切科學的基礎, 其重要性自不待言. 現在就讓我們帶著愉快與充滿冒險的心情出發吧.

1 自然數與整數

1. 自然數即正整數 1、2、3、...., 又稱為計物數. 自然數系以 $\mathbb{N}$ 表示, $a \in \mathbb{N}$ 表示 a 為自然數中的任一元素, 其中符號"$\in$"稱為"屬於".
2. 自然數、0、負整數合稱為整數, 整數系以 $\mathbb{Z}$ 表示.

2 整數的性質

設 a, b, $c \in \mathbb{Z}$, 則整數具有下列性質 :

1. 封閉性 : $a \pm b \in \mathbb{Z}$, $ab \in \mathbb{Z}$, 即對 +, −, ×具有封閉性.
2. 交換律 : $a+b=b+a$, $ab=ba$.
3. 結合律 : $(a+b)+c=a+(b+c)$.
4. 分配律 : $a(b \pm c)=ab \pm ac$, $(b \pm c)a=ab \pm ca$
5. 三一律 : $a>b$, $a=b$, $a<b$ 三式恰有一式成立.
6. 遞移律 : 若 $a>b$, $b>c \Rightarrow a>c$.
7. 加法律 : $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$
8. 乘法律 : $\begin{cases} c>0,\ a>b \Leftrightarrow ac>bc \\ c<0,\ a>b \Leftrightarrow ac<bc \end{cases}$

【觀念提點】

1. 整數對除法不具有封閉性.
2. 試想想, 自然數對四則運算何者具有封閉性？
3. 符號"$\Leftrightarrow$"稱為充要條件, 試想想其邏輯關係為何？

3 整數乘、除法的性質

1. 整除、因數與倍數

設 a, $b \in \mathbb{Z}$且$b \neq 0$, 若存在$q \in \mathbb{Z}$使得$a = qb$, 則稱 b是 a的因數, a是 b的倍數. 換句話說, b是 a 的因數則 b 整除 a, 記為$b|a$. 因此便有$b \mid a \Leftrightarrow a = qb$. 此外, 整除有幾個重要的性質,

(1)已知a, b, $c \in \mathbb{Z}$, 若$c \mid a$且$c \mid b \Leftrightarrow c \mid ma + nb$, $(\forall m,\ n \in \mathbb{Z})$.

推廣 : $b \mid a_1$, $b \mid a_2$, ..., $b \mid a_k \Leftrightarrow b \mid m_1a_1 + m_2a_2 + ... + m_ka_k$, $\forall m_1$, m_2, ..., $m_k \in \mathbb{Z}$.

(2) a, $b \in \mathbb{Z}$, 若$a \mid b$且$b \mid a \Rightarrow b = \pm a$.

特別地, 當a, $b \in \mathbb{N}$, $a \mid b$且$b \mid a \Rightarrow a = b$.

(3) a, $b \in \mathbb{Z}$, 若$a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$.

特別地, 當a, $b \in \mathbb{N}$, $a \mid b \Rightarrow a \leq b$.

2. 質數

設$P \in \mathbb{N}$, $P > 1$, 若 P除了 1 與 P本身, 沒有其他正因數, 則稱 P為質數, 否則稱為合數.

(1)質數有無限多個.

(2)顯然 2 是所有質數中最小者且是唯一的偶數.

(3)質數與合數都是在正整數且大於 1 的範圍內做討論.

(4)若 P為質數, 且 $P \mid ab \Rightarrow P \mid a$或$P \mid b$.

推廣 : P為質數, 且 $P \mid a_1a_2...a_k \Rightarrow P \mid a_i$, $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ k\}$.

(5)算術基本定理(唯一分解定理) :

任意大於 1 的自然數, 必可表為質數的乘積, 且若不考慮這些質因數的順序, 此表示方法唯一. 此結果是由歐幾里得(325 B.C.~265 B.C.)首先提出並給予證明.

若 P為質數, 則 $P=P$.

若 P 為合數則必可唯一分解為 $P = P_1P_2 \cdots P_n$, 其中$P_1 \leq P_2 \leq ... \leq P_n$均為質數, 利用指數運算可整理為 $P = q_1^{n_1}q_2^{n_2}q_3^{n_3} \cdots$, $(q_1 < q_2 < ...$為質數, n_1, n_2, $... \in \mathbb{N})$, 稱為 P的標準分解式.

(6)質數的檢驗法則 : 設$P \in \mathbb{N}$, $P > 1$, 若P沒有$\leq \sqrt{P}$的質因數, 則P為質數.

(7)若 A的標準分解式為$A = P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2} \cdots P_n^{\alpha_n}$, 則不大於 A 且與 A 互質的自然數個數 :

$A(1-\frac{1}{P_1})(1-\frac{1}{P_2})\cdots(1-\frac{1}{P_n})$. (此證明留給讀者, 有興趣請見[習題 8])

3. 偶數與奇數

設$P \in \mathbb{Z}$, 若 P可被 2 整除, 則稱 P為偶數, 否則稱為奇數.

若 P為偶數$\Leftrightarrow P = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$; 若 P為奇數$\Leftrightarrow P = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$

所有的整數不是偶數就是奇數, 且偶數、奇數具有如下的性質 :

(1)偶數+偶數＝偶數 (2)奇數+奇數＝偶數 (3)偶數+奇數＝奇數 (4)偶數×奇數＝偶數

(5)偶數×偶數＝偶數 (6)奇數×奇數＝奇數

(7) $P \in \mathbb{Z}$, P為偶數$\Leftrightarrow P^2$為偶數, P為奇數$\Leftrightarrow P^2$為奇數 (8)連續兩正整數之積必為偶數.

[例 1] (1)試證明：a, b, $c \in \mathbb{Z}$, 若$c \mid a$且$c \mid b \Leftrightarrow c \mid ma + nb$, $(\forall m, n \in \mathbb{Z})$.

(2)試證明：a, $b \in \mathbb{Z}$, 若$a \mid b$且$b \mid a \Rightarrow b = \pm a$.

(3)試證明：a, $b \in \mathbb{Z}$, 若$a \mid b \Rightarrow |a| \le |b|$.

(4)設$\alpha \in \mathbb{N}$, 且$\frac{2\alpha + 7}{3\alpha + 1} \in \mathbb{N}$, 試求$\alpha$.

4 同餘

在討論整數的除法過程中, 能否整除或被整除, 往往是一個至關重要的問題. 所謂整除就是餘數為 0, 因此在探討除法問題時, 我們所關注的焦點便是餘數. 對於餘數問題, 德國數學家高斯(1777 ~ 1855)首先引入同餘的概念, 之後同餘便遍及數論的各個角落.

1. 同餘的定義

a, b, $m \in \mathbb{Z}$, 若a, b被m除的餘數相同, 則稱a, b關於模m同餘, 記做$a \equiv b \pmod{m}$. 顯然 $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (b-a)$, 因此 $m \mid (b-a)$ 也可視為 a, b 關於模 m 同餘的定義.

以下便是同餘的例子 :

$7 \equiv 12 \pmod{5}$, $81 \equiv 99 \pmod{3}$, $44 \equiv 56 \pmod{12}$, $-3 \equiv 22 \pmod{5}$

討論 :

(1)因為 $m \mid (b-a)$ 等價於 $-m \mid (b-a)$, 因此爾後一律取 $m \geq 1$.

(2)式子 $a \equiv b \pmod{m}$ 稱為模 m 的同餘式, 或簡稱同餘式.

(3)談同餘式一定要指名關於哪個模, 不同的模可能會使同餘式不成立.

2. 同餘式的性質

(1)同餘式相加

$a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a+c \equiv b+d \pmod{m}$.

(2)同餘式相減

$a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a-c \equiv b-d \pmod{m}$.

(3)同餘式相乘

$a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$.

值得一提的是, $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, $n \in \mathbb{N}$.

此外, 請注意同餘式不是等式, $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$, 但其逆敘述未必成立, 即 $ac \equiv bc \pmod{m} \not\Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$ (未必成立).

例如 : $6 \times 3 \equiv 6 \times 8 \pmod{10}$, 但 $3 \not\equiv 8 \pmod{10}$.

同理, $a^n \equiv b^n \pmod{m} \not\Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$. 例如 : $5^2 \equiv 7^2 \pmod{8}$, $5 \not\equiv 7 \pmod{8}$.

(4)模的約簡

$a \equiv b \pmod{m}$, 且 $n \mid m \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$, 其逆未必為真.

$a \equiv b \pmod{m}$, $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m, n]}$.

(5)同餘式的約簡

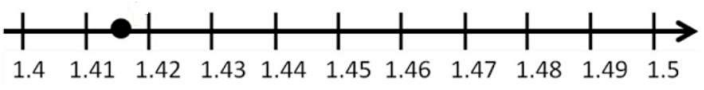
$$ca \equiv cb \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{(m, c)}}.$$

6 有理數、無理數與實數

1. 有理數的定義

   設 $a,\ b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0$, 則可表為 $\frac{a}{b}$ 的數稱為有理數, 有理數系以 Q 來表示. 顯然整數是屬於有理數, 即有理數系包含整數系, 記為 $Q\supset\mathbb{Z}$.
2. 有限小數與無限循環小數均是有理數.
3. 有理數對加、減、乘、除, 具有封閉性. $a,\ b\in Q$, 且 $b\neq 0\Rightarrow a\pm b,\ ab,\ \frac{a}{b}\in$ Q.
4. 有理數的稠密性

   如右圖所示, 我們可在數線上將有理數的點一對一的標示出來. 顯然, 任意兩相異有理數 $a,\ b$ 之間, 必存在另一個有理數. 例如 $\frac{a+b}{2}$ 便是介於 $a,\ b$ 之間的有理數. 以此推論, 任意兩相異有理數之間存在無限多個有理數. 因此有理數在數線上是非常稠密的, 此性質稱為有理數的稠密性. 值得一提的是, 整數不具備稠密性, 因為任意兩連續整數之間不存在任何相異的整數.

5. 無理數的定義

   有理數是稠密的, 但是否只需要有理數便足以填滿整個數線？這個答案是否定的, 可以證明任兩個相異有理數間, 必存在非有理數的數, 此種數稱為無理數. 無理數定義為凡是不能寫成 $\frac{a}{b}(a,\ b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0)$ 的數, 例如 : $\sqrt{2},\ \pi$. 此外, 無理數化為小數是無限不循環小數.
6. 無理數的運算性質

   $a,\ b,\ c,\ d\in Q,\ x\in Q'$

   (1) $a\pm x\in Q'$, 例如 $2+\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2}\in Q'$.

   (2) $a\neq 0,\ ax,\ \frac{x}{a},\ \frac{a}{x}\in Q'$, 例如 $2\sqrt{2},\ \frac{2}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\in Q'$.

   (3) $a+bx=0\Leftrightarrow a=0,\ b=0$.

   (4) $a+bx=c+dx\Leftrightarrow a=c,\ b=d$.
7. 無理數的稠密性

   與有理數一樣, 無理數也具備稠密性.
8. 有理數與無理數的不完備性

   單獨的有理數系或單獨的無理數系均不足以填滿整個數線, 換句話說, 任兩個有理數間, 存在無限多個無理數. 同理, 任兩個無理數間, 存在無限多個有理數. 此性質稱為有理數或無理數的不完備性.

課後習題演練

理科的學習過程中, 如果少了作習題這一步驟, 那就什麼都沒留下了.

【*表示難題】

[習題 1](單選)

(1)將$\frac{2}{7}$化為小數時, 小數點後第 100 位數字為何？

(2)若將$\frac{1}{41}$化為循環小數, 試求小數點下第 2008 位數字.

(3) $\sqrt{74-\sqrt{47}}$ 介在哪兩個連續整數之間?

(4)設 a, b 為有理數, c, d 為無理數, 則下列何者正確? (A)$a+c$ 為無理數 (B)$c+d$ 為無理數 (C)ac 為無理數 (D)cd 為無理數 (E)若 $a+c=b+d$, 則 $a=b$, $c=d$.

(5) $\sqrt{\frac{4}{9}}\times\sqrt{8}\div\sqrt{\frac{3}{2}}=$ (A) $\frac{8}{27}\sqrt{3}$ (B) $\frac{8}{9}\sqrt{3}$ (C)$\frac{3}{8}\sqrt{3}$ (D)$\frac{27}{8}\sqrt{3}$ (E)$\frac{9}{8}\sqrt{3}$.

(6)試將$0.2\overline{37}$化為分數.

(7)若 $\overline{AB}=12$, 在 $\overline{AB}$ 上取一點 C 使 $\overline{AC}=7$, 又過 C 點作 $\overline{AB}$ 的垂直線與以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓交於 D點, 試求$\overline{CD}$.

(8)設 a 為 1 至 9 的正整數, 且$\frac{13}{99}<0.1\overline{a2}<\frac{14}{99}$, 試求 a.

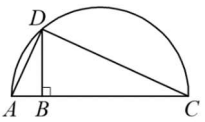
(9)化簡$0.\overline{32}+0.\overline{210}$為一個循環小數.

[習題 2]

(1)小江某日執行一計算, 因精神不濟, 將一正數「乘以$0.\overline{5}$」, 誤計算為「乘以 0.55」, 導致所得結果相差 3, 則此正數應為_____.

(2)將分數$\frac{16241}{49950}$化為小數時, 試求小數點後第 51 位數字.

(3)如右圖所示, $\overline{AB}=1+\sqrt{2}$, $\overline{BC}=6+4\sqrt{2}$, B在$\overline{AC}$上. 以$\overline{AC}$為直徑作半圓並過 B 作垂直於$\overline{AC}$的直線交半圓於 D 點. 若$\overline{AD}=a+b\sqrt{2}$（$a$, b 為有理數）, 試求數對(a, b).



(4)若函數 $f(n)$表「$\frac{4}{7}$化成小數, 小數點後第 n 位數」, 試求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(123)$.

(5)若 $A(1)$, $B(4)$, $C(5)$為數線上三點, O為原點, 長方形 $BCDE$中$\overline{BE}=2\overline{BC}$, 並依下列步驟作圖：

(1)以 B為圓心, $\overline{BD}$長為半徑, 畫弧交數線於 F點. (2)以$\overline{OF}$為直徑作半圓.

(3)過 A點作$\overline{AH}$垂直於數線, 交半圓於 H.

若$\overline{AH}$的長可以寫成$\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, 其中 a, b 皆為自然數, 試求 $a+b$.

(6)設$\sqrt{28}$的小數部分為 k, 將$\sqrt{3-k}$化為$\sqrt{a}-b$的形式, 若 a, b 為整數, 試求 $a+b$.

(7)設 $a=\sqrt{8+\sqrt{63}}$, n 為正整數, 若 $n<a+\frac{1}{a}<n+1$, 試求 n.